والأخيرة

المحاضرة العاشرة _٢م_١٥_   الاثنين $2018/5/14$ م

اختبار فرضية إحصائية

علماً بأنه α معلوم ⇐ يعين كحصائية يبحث عن بناء منطقتي القبول والرفض W_0 $\bar{W}_0$

إذا كان لدينا مجتمعاً إحصائياً موصوف بتوزيع احتمالي مرتبط بالمعلمة θ

ولنا منه عينة عشوائية حجمها n

عندئذٍ: الاختبار الفرضية وهو

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta \neq \theta_0$ ، $H_1 : \theta > \theta_0$ ، $H_1 : \theta < \theta_0$

علماً أنه α معلومة ،

⇐ W_0 معلومة ، ومن أجل ذلك: سوف نبحث أولاً عن دالة الاختبار (دالة الاختبار هي: كمية تحوي الوسيط ، توزيعها الاحتمالي معلوم والكميات الباقية غير معلومة) مثل الكمية المحورية التي تستعمل في إيجاد مجال الثقة

ومن ثم نوجد قيمة دالة الاختبار تحت الفرضية H_0 عندئذٍ:

- إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة الرفض ⇐ نرفض H_0 ونقبل H_1
- أما إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة القبول ⇐ نقبل H_0 ولا يعني ذلك بالفرضية البديلة H_1 ونرفض H_1 وذلك على مستوى المعنوية α

اختبار فرضية إحصائية متعلقة بمتوسط المجتمع الإحصائي الطبيعي علماً أنه σ^2 معلوم

ليكن لدينا مجتمع إحصائي طبيعي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

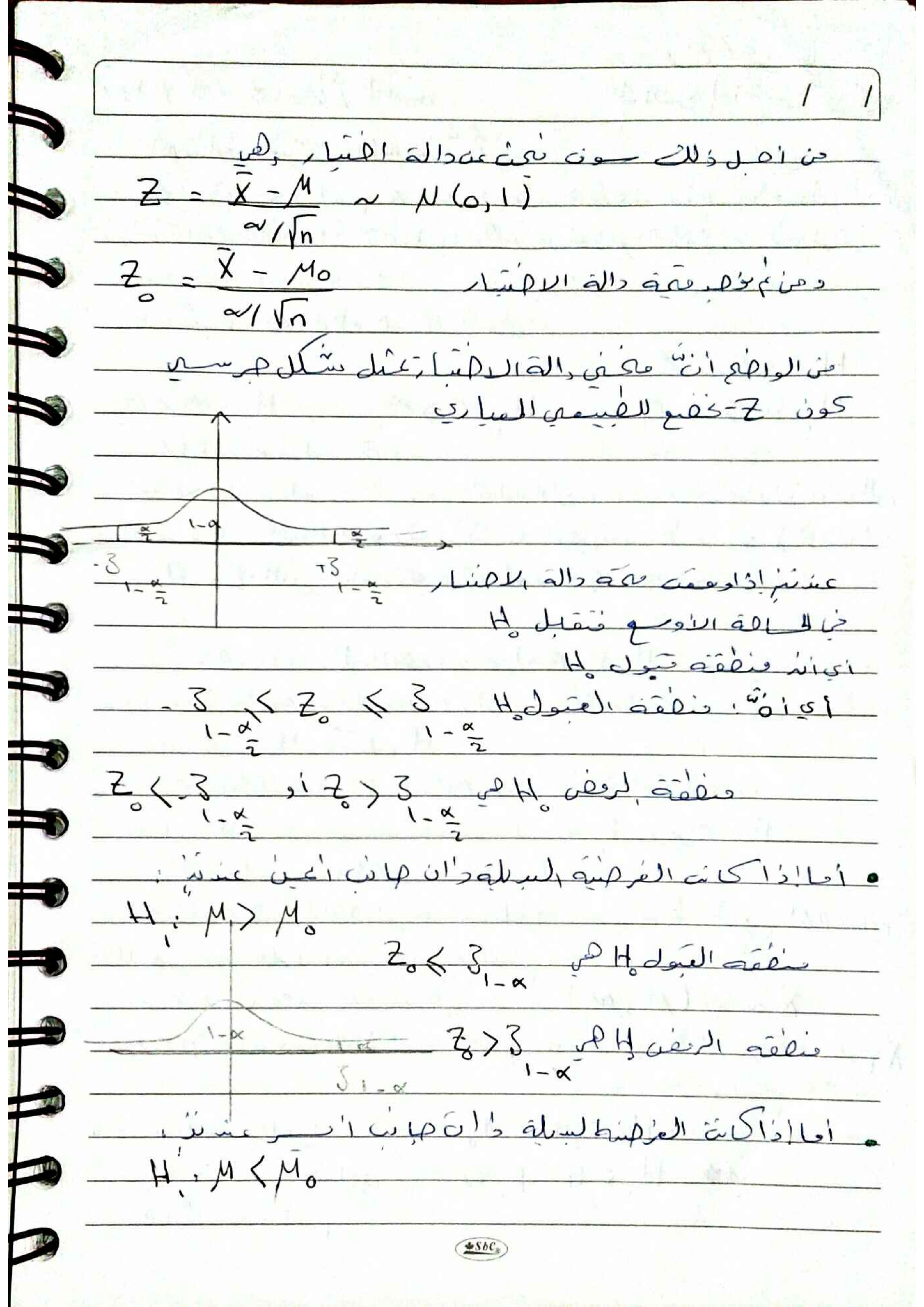
ولنا منه عينة عشوائية حجمها n ، الوسط الحسابي لها معلوم $\bar{X}$

لأن $\bar{X}$ معلوم

- عندئذٍ لنختبر الفرضية $H_0 : \mu = \mu_0$

مقابل $H_1 : \mu \neq \mu_0$

حيث α معلوم



من أجل ذلك سوف نبحث عن دالة اختبار، وهي

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

ومن ثم نوجد قيمة دالة الاختبار

$$Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

من الواضح أنّ منحني دالة الاختبار تمثل شكل جرسي كون Z تخضع للطبيعي المعياري

عندئذٍ إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في الحالة الأوسط فنقبل H_0

أي أنه منطقة قبول H_0

أي أنّ: منطقة القبول H_0: $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z_0 \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

منطقة الرفض H_0 هي $Z_0 < -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ أو $Z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

• أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات جانب أيمن عندئذٍ:

$H_1: \mu > \mu_0$

منطقة القبول H_0 هي $Z_0 \le z_{1-\alpha}$

منطقة الرفض H_0 هي $Z_0 > z_{1-\alpha}$

• أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات جانب أيسر عندئذٍ:

$H_1: \mu < \mu_0$

/ /

منطقة القبول H_1 هي $Z_0 \geq -z_{1-\alpha}$

منطقة الرفض H_1 هي $Z_0 < -z_{1-\alpha}$

α , $1-\alpha$, $-z_{1-\alpha}$

تمرين:

إذا علمت أن وزن قطعة غذاء من نوع معين له التوزيع الطبيعي بانحراف 5 غرام ولدى معاينة عينة تحوي 16 قطعة $n=16$

$\sigma^2 = 25 \Leftarrow \sigma = 5$

تبين أن متوسط وزنها $\bar{X} = 244$ غرام وبين أن:

$H_0: \mu = 250$, $H_1: \mu \neq 250$

علماً أن $\alpha = 0,05$ ، $z_{0,975} = 1,96$

الحل:

من الواضح أن المجتمع المدروس الطبيعي لأوزان القطعة يخضع للتوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\sigma = 5$ بحيث

$X \sim N(\mu, 25)$, $n = 16$, $\bar{X} = 244$

عندئذ لاختبار H_0 مقابل H_1 نبحث عن دالة الاختبار المناسبة وهي

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

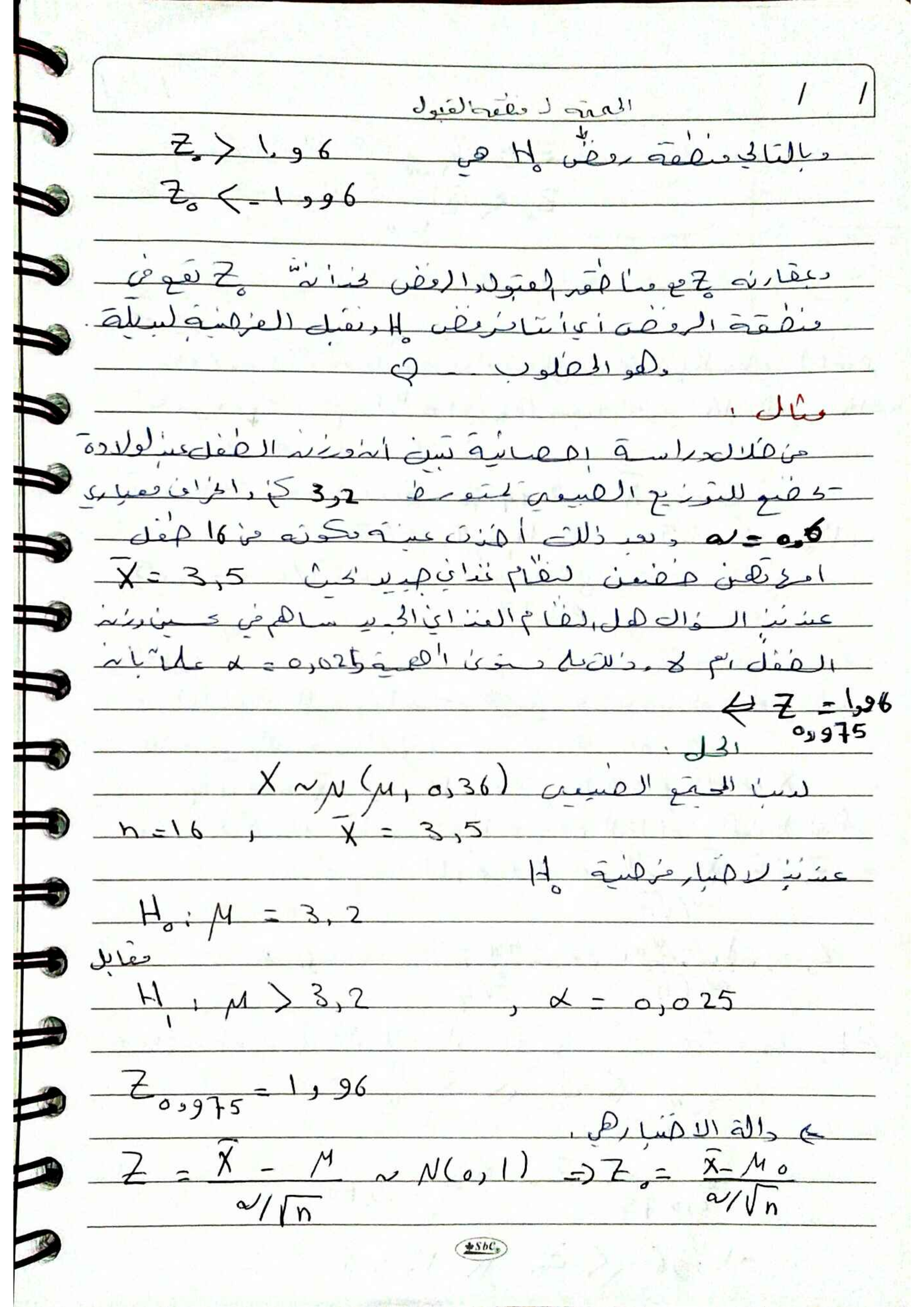
$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{244 - 250}{5/4} = -4,8$$

وبما أن الفرضية البديلة ذات جانبين عندئذ منطقة قبول H_0 هي

$$-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z_0 \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

أي $-z_{0,975} \leq Z_0 \leq z_{0,975}$

أي: $-1,96 \leq Z_0 \leq 1,96$



الحدية لمنطقة القبول

وبالتالي منطقة رفض H_0 هي $Z_0 > 1,96$

$Z_0 < -1,96$

ومقارنة Z_0 مع ما تقدم القبول والرفض نجد أن Z_0 تقع في منطقة الرفض أي أننا نرفض H_0 ونقبل الفرضية البديلة وهو المطلوب ...

مثال:

من خلال دراسة إحصائية تبين أن وزن الطفل عند الولادة يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 3,2 كغ وانحراف معياري $\sigma = 0,6$ وبعد ذلك أخذت عينة مكونة من 16 طفل أمهاتهن يخضعن لنظام غذائي جديد بحيث $\bar{X} = 3,5$ عندئذ السؤال هل النظام الغذائي الجديد ساهم في تحسين وزن الطفل أم لا، وذلك بمستوى المعنوية $\alpha = 0,025$ علماً أن

$\Leftarrow Z_{0,975} = 1,96$

الحل:

لدينا المجتمع الطبيعي $X \sim N(\mu, 0,36)$

$n = 16$, $\bar{X} = 3,5$

عندئذ لاختبار فرضية H_0

$H_0 : \mu = 3,2$

مقابل

$H_1 : \mu > 3,2$, $\alpha = 0,025$

$Z_{0,975} = 1,96$

← دالة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

/ /

$$\Rightarrow Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{3,5 - 3,2}{(0,6)/4} = 2$$

بما أن الفرضية البديلة ذات جانب أيمن نستنتج منطقة القبول

H_0 هي: شرط القبول هو $Z_0 \leq Z_{1-\alpha} \Rightarrow Z_0 \leq Z_{0,975} = 1,96$

ومنطقة الرفض $Z > Z_{1-\alpha} \Rightarrow Z_0 > 1,96$

مقارنة Z_0 مع مناطق القبول والرفض نجد أن Z_0 تقع في منطقة الرفض

وبالتالي نرفض H_0 ونقبل H_1 وهذا يعني أن النظام الغذائي

الجديد ساهم في تحسين وزن الطفل.

مثال 3.

اذا كان متوسط المدة اللازمة لاستجابة مريض لدواء معين

هو 5 دقائق $(\mu = 5)$

ولنفرض أنه اقترح دواء جديد وجرب على 64 مريض $n = 64$

فكان متوسط المدة اللازمة لاستجابة المريض دقيقة $\bar{X} = 4,7$

بانحراف معياري قدره دقيقة $\sigma = 1$ هل الدواء الجديد المقترح

أفضل من القديم على مستوى أهمية $\alpha = 0,01$

و $Z_{0,99} = 2,33$

الحل

بما أن حجم العينة $n = 64 > 30$ ← التوزيع طبيعي

من الواضح أنه $H_0 = \mu = 5$

مقابل

$H_1 : \mu < 5$, $\alpha = 0,01$, $Z_{0,99} = 2,33$

لاختبار هذه الفرضية سوف نبحث عن دالة الاختبار

SbC

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{4.7 - 5}{1.2 / 8} = -2$$

وعليه الفرضية البديلة ذات جانب أيسر عندئذٍ منطقة قبول H_0 هي: $Z_0 \geq -z_{1-\alpha}$

$$Z_0 \geq -z_{0.99} = -2.33$$

ومنطقة الرفض لـ H_0 هي $Z_0 < -2.33$

وبمقارنة مناطق القبول والرفض نجد أن Z_0 تقع في منطقة القبول كون $Z_0 < -2.33$

⇐ نقبل H_0 ونرفض H_1 أي أن الدواء الجديد ليس أفضل من الدواء القديم

وظيفة:

بيّن أن من عينة حجمها $n = 100$ أن متوسط العمر كان 71.8 بانحراف معياري $\sigma = 8.9$ سنة

عندئذٍ هل هذا يشير على أن متوسط العمر الآن أكبر من 70 سنة وذلك على مستوى أهمية $\alpha = 0.05$ علماً بأن $Z_{0.95} = 65$

حل:

إن الفرضيات لهذا الاختبار:

$H_0 : \mu = 70$

$H_1 : \mu > 70$

* اختبار متوسط مجتمع احصائي طبيعي تباينه σ^2 مجهولة.

نفرض لدينا مجتمع احصائي طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$

حيث σ^2 مجهولة ولنأخذ منه عينة عشوائية

وسطها الحسابي $\bar{X}$ وانحرافها المعياري s وتباينها s^2

عندئذ لنختبر الفرضية $H_0 = \mu = \mu_0$

مقابل الفرضية البديلة

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

$H_1' : \mu > \mu_0$

$H_1' : \mu < \mu_0$

وذلك عند مستوى الدلالة α معلوم

من اجل ذلك سوف نبحث عن دالة اختبار وهذه الدالة هي

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

ومن ثم نوجد قيمة دالة الاختبار

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

• اذا كانت الفرضية البديلة ذات جانبين

عندئذ منطقة قبول H_0 هي $-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq T_0 \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

ومنطقة الرفض هي $T_0 < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ (أو) $T_0 > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

• اما اذا كانت الفرضية البديلة ذات جانب ايمن

منطقة القبول H_0 هي $T_0 \leq t_{1-\alpha}(n-1)$

الرفض H_0 هي $T_0 > t_{1-\alpha}(n-1)$

• اما اذا كانت الفرضية البديلة ذات جانب ايسر

منطقة القبول H_0 هي $T_0 \geq t_{1-\alpha}(n-1)$

الرفض H_0 هي $T_0 < -t_{1-\alpha}(n-1)$

/ /

مثال:

تدعي شركة لانتاج البطاريات التي تستخدم في الالعاب الطبية أن عمر البطارية من انتاجها له التوزيع

من انتاج هذه الشركة تحوي 6 بطاريات

اخذت عينة عشوائية حجمها $n=6$ فكانت اعمارهم بالسنوات كما يلي:

3,8 , 1,9 , 2,9 , 0,9 , 4,0 , 3,5

هل نستنتج بأن الشركة بالغ في ادعائها أن متوسط عمر البطاريات هو التي تنتجها عند مستوى الثقة $\alpha = 0,01$ علما أن

$$t_{0,99}(5) = 3,365$$

الحل:

من الواضح أنه لدينا تجميع العينات الطبيعية له مجهوله

عندئذ المطلوب هو اختبار الفرضية

$H_0: \mu = 3$

مقابل

$H_1: \mu < 3$

ومن أجل ذلك سوف نعين عند الاختبار وهو

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad 6-1=5$$

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{2,833-3}{1,233/\sqrt{6}} = -0,337$$

$$, \bar{X} = 2,833 \quad , \quad S = 1,213$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{6}(X_i - \bar{X})^2$$

وبما أن الفرضية البديلة ذات جانب أيسر

← عندئذ منطقة قبول H_0 هي

$$T_0 \geq -t_{1-\alpha}(n-1)$$

$$T_0 \geq -t_{0,99}(5) = -3,365$$

منطقة الرفض

/ /

وإذا قمنا بمقارنته مع الفترة القبول والرفض نجد أنه ~~H_1~~ تقع في منطقة القبول لذلك نرفض H_1 ونقبل H_0

أي أنه الشركة لا تبالغ في ادعائها

مثال:

مجتمع إحصائي طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ ولنا سحبنا عينة عشوائية حجمها $n=12$ حيث $\bar{X}=42$

وانحرافها المعياري $S=11,9$

عندئذ الفرضية $H_0: \mu=50$

مقابل $H_1: \mu>50$

وذلك عند مستوى الدلالة $\alpha=0,05$ علماً أن

$$T_{0,95}^{(11)}=1,796$$

اختبار حول النسبة في المجتمع

(في الاختبار متعلق بوسيط المجتمع الإحصائي البرنولي.)

إذا كان لدينا مجتمع إحصائي برنولي وسيطه P، وأخذنا منه عينة عشوائية حجمها n، ومتوسطها الحسابي $\bar{X}$، عندئذ لاختبار الفرضية

$H_0: P=P_0$; $\bar{X}=\hat{P}$ (المقدر النقطي لوسيط المجتمع الإحصائي البرنولي.)

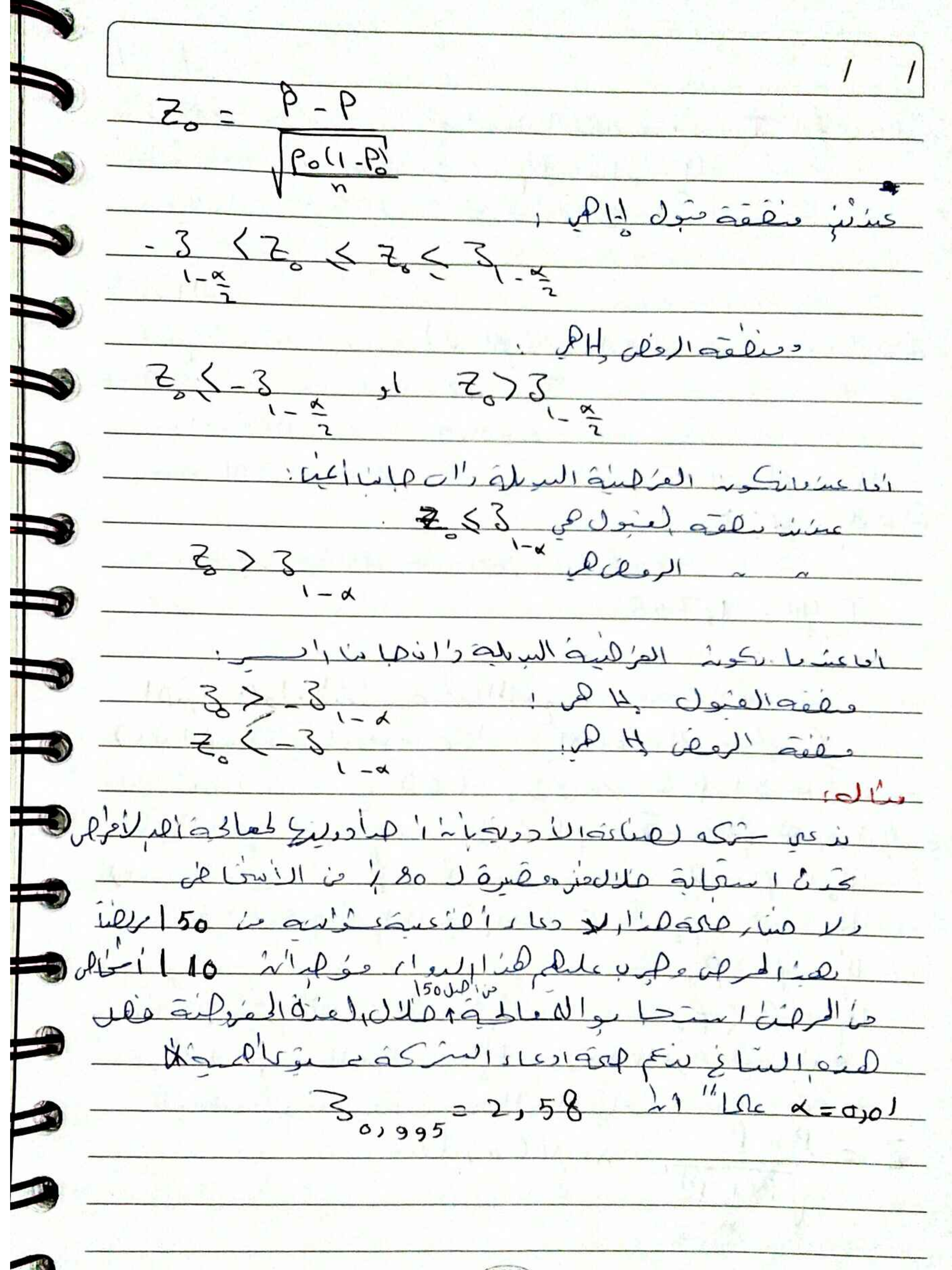
$H_1: P\neq P_0$

$H_1: P>P_0$

$H_1: P<P_0$ وذلك عند مستوى الدلالة α معلوم

من أجل اختبار الفرضية H_0 مقابل الفرضية H_1 البديلة ذات جانبين سوف نحدد منطقة الاختبار.

$$Z=\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}\sim N(0,1)$$



$$Z_0 = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

عندئذٍ منطقة قبول H_0 هي :

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z_0 < Z_0 \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

ومنطقة الرفض H_0 هي :

$$Z_0 < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{أو} \quad Z_0 > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

أما عندما تكون الفرضية البديلة ذات اتجاه أيمن :

عندئذ منطقة القبول هي $Z_0 \leq Z_{1-\alpha}$

" " الرفض هي $Z_0 > Z_{1-\alpha}$

أما عندما تكون الفرضية البديلة ذات اتجاه أيسر :

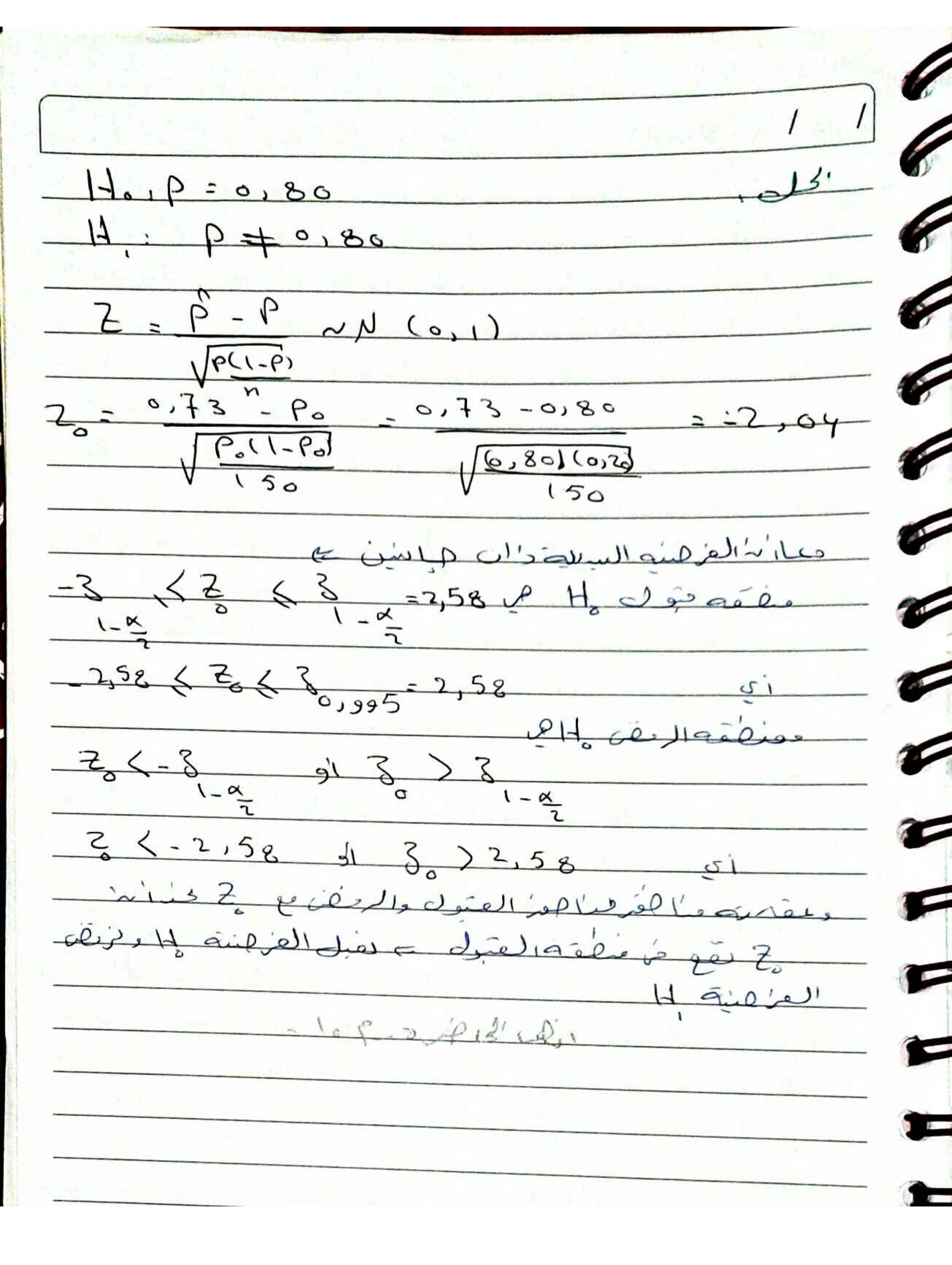
منطقة القبول H_0 هي : $Z_0 \geq -Z_{1-\alpha}$

منطقة الرفض H_0 هي : $Z_0 < -Z_{1-\alpha}$

مثال :

تدعي شركة لصناعة الأدوية أن أحد أدويتها لمعالجة أحد الأمراض تكون استجابة هذا العقار مقتصرة لـ 80% من الأشخاص ولاختبار صحة هذا الادعاء أخذت عينة عشوائية من 150 مريضاً بهذا المرض وجرب عليهم هذا الدواء فوجد أنه 110 أشخاص من المرضى استجابوا للمعالجة (من أصل 150) خلال العينة العشوائية فهل هذه النتائج تدعم ادعاء الشركة عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ أي 1%

$$Z_{0.995} = 2.58$$



/ /

الحل:

$H_0 : p = 0,80$

$H_1 : p \neq 0,80$

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$Z_0 = \frac{0,73 - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{150}}} = \frac{0,73 - 0,80}{\sqrt{\frac{(0,80)(0,20)}{150}}} = -2,04$$

بما أن الفرضية البديلة ذات جانبين ←

منطقة قبول H_0 هي $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z_0 \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,58$

أي $-2,58 \leq Z_0 \leq z_{0,995} = 2,58$

منطقة الرفض H_0 هي

$Z_0 < -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ أو $z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

أي $Z_0 < -2,58$ أو $z_0 > 2,58$

بمقارنة مناطق القبول والرفض مع Z_0 نجد أن

Z_0 تقع في منطقة القبول ← نقبل الفرضية H_0 ونرفض

الفرضية H_1